

谱元方法求解波动方程时显式与隐式 差分方法的比较

朱昌允, 秦国良, 徐忠

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 分别将显式中心差分和隐式 Newmark 差分方法与 Chebyshev 谱元方法相结合, 探讨了当采用谱元方法求解气动噪声问题时, 这 2 种时间差分方法对数值精度和计算稳定性的影响. 通过模拟噪声扰动在自由空间的传播过程, 比较了 2 种时间差分方法的数值误差, 研究了显式中心差分方法的稳定性条件. 由此得出以下结论: 当显式中心差分方法稳定时, 2 种差分方法均可得到有效的数值解, 在同一时刻的同一网格节点上, Newmark 方法的数值误差约为显式方法的 2 倍左右; 当计算采用的时间步长大于显式中心差分方法的临界步长时, 显式方法发散, Newmark 方法的数值结果仍和解析解保持一致.

关键词: 噪声; 气动噪声; 波动方程; 谱元方法; 差分方法

中图分类号: O353 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)09-1142-04

Comparison of Explicit Central Difference Method and Implicit Newmark Method Using Chebyshev Spectral Element Method for Wave Equations

ZHU Changyun, QIN Guoliang, XU Zhong

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The explicit central difference method and the implicit Newmark method was combined with the Chebyshev spectral element method, respectively, and their influences on the numerical error and stability were studied. The process of one noise disturbance spreading in freedom space was simulated and the numerical errors of the two time-difference methods were compared with each other and the stability of the central difference method was investigated. The conclusions can be drawn that both the two time-difference methods can acquire right numerical result. The explicit central difference method has higher accuracy than the implicit one and the numerical error of the Newmark method is about twice that of the explicit central difference method when the central difference method is stable. Moreover, the result of central difference method is divergent when the time step used is larger than the critical step while the numerical result of the Newmark method still is coincident with the reference solution obtained by the analytical method.

Keywords: noise; aerodynamic noise; wave equations; spectral element method; difference method

目前, 在叶轮机机械(例如风机和航空发动机)的设计与运行中, 噪声水平是非常重要的控制指标, 气动噪声为其主要噪声类型. 对此类噪声的产生机理

和传播特性进行研究, 需要借助高精度数值方法, 此类问题目前被称为计算气动声学问题. 谱元方法在其中的应用受到日益重视^[1-2], 但仍存在很多问题,

例如需要探讨时间离散格式对计算稳定性的影响,找到或发展一种具有长时间稳定性的方法,求解形如以下的常微分方程组^[3]

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{Q}_t \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为总质量矩阵; $\mathbf{K}$ 为总刚度矩阵; $\mathbf{Q}_t$ 为源项.式(1)的解法常用时间差分法和振型叠加法,时间差分法又分为隐式时间差分方法和显式时间差分方法,以下分别简称隐式方法和显式方法.

显式方法比较高效,在每一个时间步进行差分,主要涉及矩阵和向量的乘法,且此矩阵通常非常稀疏.在显式方法中,基于网格节点分布可以对算法进行优化,且并行算法较为容易实现.但是,显式方法的缺点是精度较低,计算需要很小的时间步长,算法的稳定性对计算区域的网格有较高的要求,这些缺点均使显式算法的综合性能大打折扣.

隐式方法的绝对稳定性决定其可以采用较大的时间步长,但其所耗费的资源会大大增加,在每一时间步需要求解一个线性系统,并行计算不能直接使用.很多场合对稳定性的要求又使得显式算法无法使用,故人们对隐式算法给予厚望,期望能够提高计算步长,减少计算步数,获得较高精度,或者寻求对于线性系统更加高效的求解器等.

本文阐述了2种差分方法的具体步骤和区别,当空间离散均采用 Chebyshev 谱元方法时,分别将它们用于模拟计算区域内噪声扰动的传播.通过该算例比较了二者数值精度的差异,并对它们的稳定性进行了比较.

1 控制方程

声波在二维静止介质中的传播,其控制方程为

$$\partial^2 u / \partial t^2 - c_0^2 \nabla^2 u = f \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (2)$$

采用第一类边界条件

$$u(x, y, t) \Big|_{\Gamma} = g(x, y, t) \quad \text{on } \Gamma \times [0, T] \quad (3)$$

初始条件为

$$u(x, y, 0) = u_0, \quad \dot{u}(x, y, 0) = \dot{u}_0 \quad (4)$$

计算区域为

$$\Omega, \Omega \in \mathbb{R}^2$$

式(2)~式(4)中: Γ 为边界,时间区间为 $[0, T]$; c_0 为当地声速; f 是源项; $g(x, y, t)$ 为边界条件; u_0 和 $\dot{u}_0$ 为初始条件; u 为待求的未知量.那么,式(2)的变分问题为^[4-6]

$$\begin{aligned} d^2 \int_{\Omega} w u \, dx dy / dt^2 + c_0^2 a(u, w) &= (f, w) \\ \forall v, w &\in H^1(\Omega), \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (5)$$

对式(5)采用谱元方法进行空间离散,得常微分方程组

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{Q}_t \quad (6)$$

初始条件为

$$u(x, y, 0) = u_0, \quad \dot{u}(x, y, 0) = \dot{u}_0$$

2 显式中心差分方法

欲用中心差分方法求解式(6),首先应将加速度和速度用位移表示,即

$$u_t = \frac{1}{\Delta t^2} (u_{t-\Delta t} - 2u_t + u_{t+\Delta t}) \quad (7)$$

$$\dot{u}_t = \frac{1}{2\Delta t} (-u_{t-\Delta t} + u_{t+\Delta t}) \quad (8)$$

将式(7)、式(8)代入式(6)可得

$$\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} u_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) u_t - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} u_{t-\Delta t} \quad (9)$$

若已求得 $u_{t-\Delta t}$ 和 u_t , 即可用上式进一步得到 $u_{t+\Delta t}$. 故,式(9)是求解各离散时间点解的递推公式.

对于起始步,在 $t=0$ 时刻,要计算 $t+\Delta t$ 时刻的值 $u_{\Delta t}$,除初始条件给出的 u_0 外,还需要一个 $u_{-\Delta t}$,可利用式(7)和式(8)得到,即

$$u_{-\Delta t} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0 \quad (10)$$

其中 u_0 和 $\dot{u}_0$ 可以从给定的初始条件得到,而 $\ddot{u}_0$ 则可以利用 $t=0$ 时的运动方程式(6)得到

$$u_0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{K} u_0) \quad (11)$$

这样,就可以得到显式中心差分的逐步差分方法,具体算法步骤和稳定性证明参考文献[6].

3 隐式 Newmark 差分方法

欲用隐式 Newmark 差分方法求解式(6),在 $t \sim (t+\Delta t)$ 时间区域内采用下列假设,即

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1-\delta)u_t + \delta u_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (12)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \Delta t + [((1/2) - \alpha)u_t + \alpha u_{t+\Delta t}] \Delta t^2 \quad (13)$$

式中: α 和 δ 是由数值精度和稳定性要求决定的参数,称 δ 为Newmark因子. α 和 δ 取不同数值,代表不同差分方案.从式(13)得

$$\begin{aligned} \dot{u}_{t+\Delta t} &= (u_{t+\Delta t} - u_t) / (\alpha \Delta t^2) - \\ &\dot{u}_t / (\alpha \Delta t) - (1/(2\alpha) - 1)u_t \end{aligned} \quad (14)$$

$u_{t+\Delta t}$ 通过求解 $t+\Delta t$ 时刻的下述控制方程得到

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \quad (15)$$

将式(14)代入式(12),然后再一并代入式(15),则通过 $u_t, \dot{u}_t, u_t$ 计算 $u_{t+\Delta t}$ 的两步递推公式

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{t+\Delta} &= \mathbf{Q}_{t+\Delta} + \\ \mathbf{M}[\dot{\mathbf{u}}_t/(\alpha\Delta t^2) + \mathbf{u}_t/(\alpha\Delta t) + (1/(2\alpha) - 1)\mathbf{u}_t] \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{M}/(\alpha\Delta t^2)$, $\ddot{\mathbf{u}}_0$ 可用式(11)计算. 至此, 可用 Newmark 差分方法求解线性方程组, 具体算法步骤和稳定性证明参考文献[6].

4 2种方法的比较

对于显式中心差分法, 递推公式(9)是从 t 时刻的运动方程导出的, 因此矩阵 $\mathbf{K}$ 不出现在式(9)的左端. 当 $\mathbf{M}$ 是对角矩阵时, 利用式(9)求解运动方程不涉及矩阵求逆, 仅需进行矩阵乘法运算, 以获得方程右端项.

对于隐式 Newmark 方法, 从递推公式(16)可知, $\hat{\mathbf{K}}$ 包含了矩阵 $\mathbf{K}$, 而 $\mathbf{K}$ 总是非对角的, 因此在求解 $\mathbf{u}_{t+\Delta}$ 时, $\hat{\mathbf{K}}$ 的求逆是必须的. 这是由于在导出式(16)时, 利用了 $t + \Delta t$ 时刻运动方程式(14).

对于波传播问题的求解, 显式中心差分法具有明显的优势. 分析式(9)可知, $\mathbf{M}$ 为对角矩阵, 给定某些节点的初始扰动(即 u 的某些分量为非0值), 在经过一个时间步长后, 和它们相关的节点(在 $\mathbf{K}$ 中处于同一带宽内的节点)将进入运动, 随着时间的推移, 其他节点将按此规律依次进入运动. 此特点正好和波传播的特点相一致.

但是, 显式中心差分法是条件稳定的, 其步长的选取受到系统最小固有周期的限制. 对于隐式 Newmark 方法, 当 $\delta \geq 0.5$, $\alpha \geq 0.25 \times (0.5 + \delta)^2$ 时, 算法对时间步长来讲是无条件稳定的, 步长 Δt 的选取可根据精度和滤波的需要. 故, 此隐式方法可以采用比显式方法大得多的时间步长 Δt , 使得隐式方法适合时间历程较长的系统响应分析.

综上所述, 由于显式中心差分法避免了矩阵求逆, 适合波传播特性, 在计算速度、相同网格和时间步长下计算所需的内存、机时等方面都大大优于隐式 Newmark 方法, 但其受到稳定性条件的限制.

5 数值算例

5.1 显式中心差分法与隐式 Newmark 方法的精度比较

下式为二维归一化波动方程

$$\partial^2 u / \partial t^2 - c_0^2 (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2) = 0 \quad (17)$$

初始条件为

$$u(x, y, 0) = 0$$

$$\dot{u}(x, y, 0) = \sin \pi x \sin \pi y \cos t$$

边界条件为

$$u(-1, y, t) = 1, \quad u(1, y, t) = 1$$

$$u(x, -1, t) = 1, \quad u(x, 1, t) = 1$$

解析解为

$$u(x, y, t) = \sin \pi x \sin \pi y \sin t$$

其物理意义为, 在 $t=0$ 时刻, 噪声扰动被引入到计算区域内, 其后该扰动在计算区域内自由传播.

x 和 y 方向的单元数分别为 $N_m=4$ 、 $N_n=4$, x 方向和 y 方向的网格数分别为 $N_x=4$ 、 $N_y=4$, 则总节点数 $N_G = (N_m \times N_x + 1) \times (N_n \times N_y + 1) = 625$.

使用中心差分方法求解时, 需先求临界步长^[6]

$$\begin{aligned} \Delta t_{cr} &= L_{\min} / c_0 \\ L_{\min} &= \min \left\{ \frac{L_0}{2} \left(\cos \frac{j\pi}{N_x} - \cos \frac{(j+1)\pi}{N_x} \right) \right\} \\ j &= 0, 1, \dots, N_x \end{aligned}$$

在本算例中, 可得临界步长 $\Delta t_{cr} \approx 0.13$, 为使2种方法均能取得较好的计算结果以及方便比较, 对2种方法均取计算步长 $\Delta t = 0.01$, 推进步数 $N = 10\,000$.

为比较2种差分方法的数值误差, 定义绝对误差为 $e_a = u - \tilde{u}$, 其中 u 为解析解, $\tilde{u}$ 为数值解.

Newmark 方法受 δ 因子的影响较大^[4], 在满足稳定条件 ($\delta \geq 0.5$) 时, 误差将随 δ 值的增加而增大, 当 $\delta = 0.5$ 时, 数值误差最小. 此处取 $\delta = 0.5$.

图1为计算区域内的网格剖分. 图2~图4分别给出了2种时间差分方法在 $N=1$ 、 $N=5\,000$ 、 $N=10\,000$ 时, 各个节点上的绝对误差比较. 比较图2~图4可知, 隐式 Newmark 方法的数值误差约为显式中心差分方法的2倍.

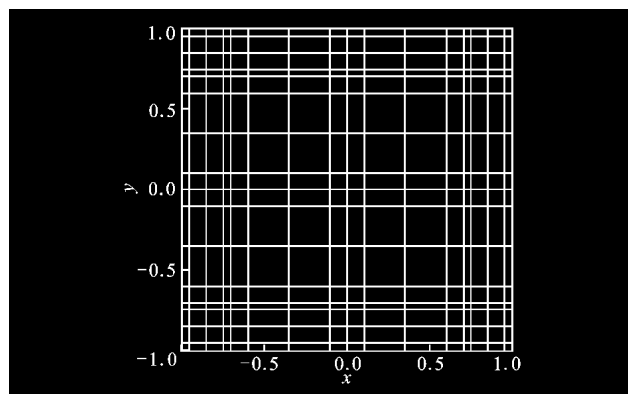
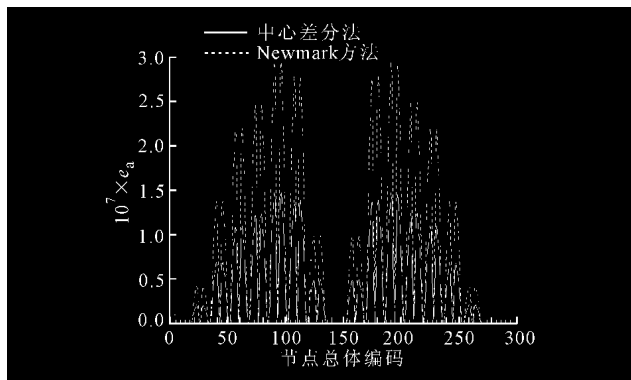
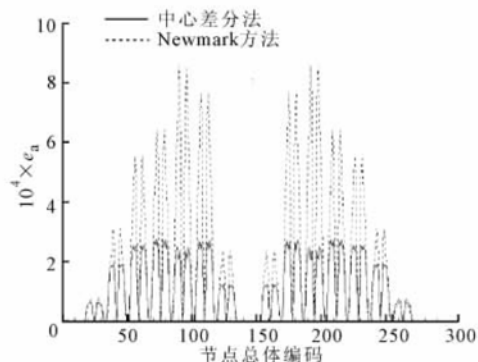
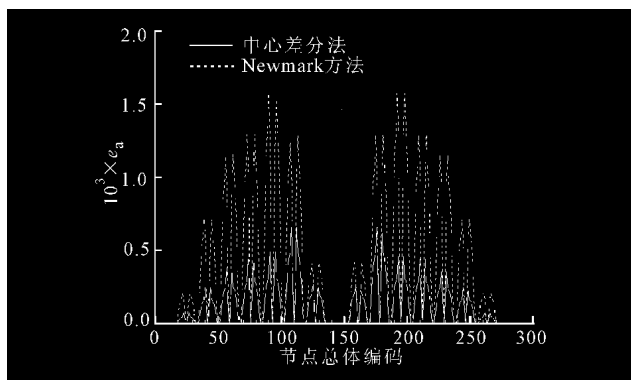


图1 计算区域内的网格剖分

5.2 中心差分和 Newmark 方法的稳定性比较

为比较中心差分法和 Newmark 方法的稳定

图2 $N=1$ 时2种差分法数值解的绝对误差比较图3 $N=5\,000$ 时2种差分法数值解的绝对误差比较图4 $N=10\,000$ 时2种差分方法数值解的绝对误差比较

性,分别采用中心差分法和 Newmark 方法求解式(17),计算网格同图1,时间步长均采用 $\Delta t=0.2$,此步长大于中心差分法的临界步长 Δt_{cr} 。对点 $P(0.603, -0.603)$ 在不同时刻的解进行比较(见图5),结果表明:Newmark 方法的数值解能与解析解保持一致;中心差分方法在计算推进到步数为18左右时开始发散,表明当显式中心差分方法的计算步长大于临界步长时,算法发散;Newmark 方法的稳定性不会受到时间步长的影响。

6 结 论

(1)空间离散采用谱元方法,时间项采用显式或

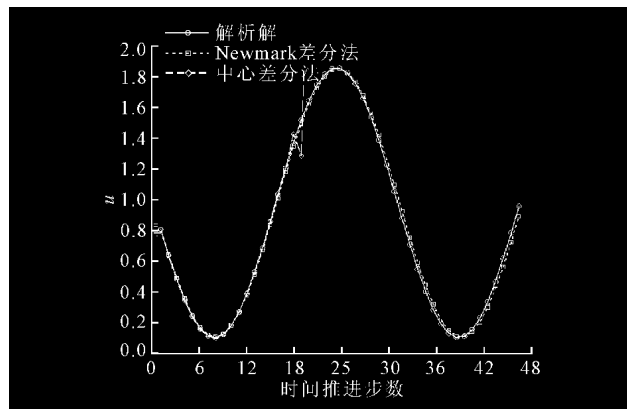


图5 同一点不同方法的数值解比较

隐式差分方法,且他们均符合各自稳定条件时,求解波动方程是可行的,均能得到较高精度的数值解。

(2)采用中心差分方法计算所得数值结果的精度明显高于隐式 Newmark 方法,这与文中第4节的分析相一致。

(3)对于中心差分方法,当采用的计算步长小于临界步长时,算法是稳定的,但当网格非常小时,临界步长也会变小,这将增加了计算的难度。

(4)当计算步长大于中心差分方法的临界步长时,中心差分方法很快发散,Newmark 方法仍保持稳定并得到正确的数值结果。

参考文献:

- [1] MAK C M. A prediction method for aerodynamic sound produced by multiple elements in air ducts [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 287(1/2): 395-403.
- [2] HAN Ning, QIU Xiaojun, MAK C M. A further study of the prediction method for aerodynamic sound produced by two in-duct elements [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 294(1/2): 374-380.
- [3] GEZA S. An iterative time-stepping method for solving first-order time dependent problems and its application to the wave equation [J]. Journal of Computational Acoustics, 2000, 8(1): 241-255.
- [4] 朱昌允,秦国良. 谱元方法在求解气动声学问题中的应用 [D]. 西安:西安交通大学能源与动力工程学院, 2006.
- [5] 许靖,秦国良. 谱元方法求解带吸收边界的气动声学问题 [D]. 西安:西安交通大学能源与动力工程学院, 2007.
- [6] 王勖成. 有限单元法 [M]. 北京:清华大学出版社, 2003: 468-522.

(编辑 王焕雪)